1 Kompleksni brojevi

1.1 Teorijski deo

Definicija 1. Skup svih elemenata oblika $x + iy$, gde su x i $y \in \mathbb{R}$, naziva se *skup kompleksnih brojeva,* u oznaci $\mathbb{C}$. Element $i \in \mathbb{C}$ je *imaginarna jedinica.*

♠ Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku. Za date kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ važi:

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

♣ Zapis $z = x + iy$ naziva se *algebarski oblik* kompleksnog broja z. Broj x se tada naziva *realni deo*, a broj y *imaginarni deo* kompleksnog broja z, u oznaci: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

♢ Za kompleksan broj $z = x + iy$, definiše se njegov *konjugovano kompleksan par*: $\overline{z} = x - iy$. Neke osobine konjugovanja kompleksnih brojeva:

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \;\; z_2 \neq 0$.

♡ Za kompleksan broj $z = x + iy$, definiše se njegov *moduo*: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometrijski, moduo predstavlja rastojanje tačke (x, y) od koordinatnog početka. Neke osobine modula kompleksnog broja:

- $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ - relacija trougla;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \;\; z_2 \neq 0$.

Definicija 2. Ako je $z = x + iy$, onda je
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
trigonometrijski oblik kompleksnog broja, gde je $\varphi \in [0, 2\pi)$ *glavna vrednost argumenta* kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$.

$$\arg z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + k\pi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0, y < 0 \\ \pi/2, & x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

♣ **Množenje i deljenje kompleksnih brojeva** - Data su dva kompleksna broja $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Tada

- $z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), z_2 \neq 0$

♢ **Stepenovanje kompleksnih brojeva** - Dat je kompleksan broj $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. n- ti stepen datog kompleksnog broja odredjen je Muavrovom formulom

- $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

♠ **Korenovanje kompleksnog broja** - Neka je $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $n \in \mathbb{N}$. Rešenje jednačine $\omega^n = z$ su kompleksni brojevi

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1.2 Zadaci

1. Naći kompleksne brojeve koji odgovaraju tačkama:

$$a)\ (0,1); \qquad b)\ (1,0); \qquad (-2,3).$$

2. Naći tačke koje odgovaraju kompleksnim brojevima:

$$a)\ i; \qquad b)\ -2i; \qquad c)\ -1+i; \qquad d)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3. Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava jednakost

$$(2+i)^3+2\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}+1}{2}\right)-i\mathrm{Im}\left(\frac{2+z}{1-i}\right)+\overline{z}=5+5i.$$

4. Naći kompleksan broj z koji zadovoljava uslove $|z-12|=|z-8i|$ i $|z-4|=|z-8|$.

5. Predstaviti u trigonometrijskom obliku sledeće kompleksne brojeve:

$$a)\ 1; \qquad b)\ -i; \qquad c)\ 1+i; \qquad d)\ 1-i\sqrt{3}; \qquad e)\ -1+i; \qquad f)\ -1-i\sqrt{3}.$$

6. Izračunati $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2016}+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2016}$.

7. Odrediti sve $n\in\mathbb{N}$ tako da je $a)$ $\mathrm{Re}(z)=0$; $\quad b)$ $\mathrm{Im}(z)=0$, ako je $z=\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$.

8. Dat je kompleksan broj $\omega=1+i$. Odrediti $z\in\mathbb{C}$ tako da je $\mathrm{Re}\,(z\overline{\omega})=2$ i $|z+\omega|=2\sqrt{2}$. Za tako dobijeno z odrediti sve $\sqrt[4]{z}$ i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

9. Rešiti jednačinu $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ i njena rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

10. Odrediti skup tačaka koje zadovoljavaju nejednačine $3\le|z+i|\le 5$ i $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$.